Hausdorff-Summierbarkeit von Potenzreihen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Rolf Trautner
aus
Kaiserslautern

Marburg/Lahn 1969

E. Symon · Foto-Druck · 355 Marburg/L. · Friedrichstr. 3

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534924_0071

Hausdorff-Summierbarkeit von Potenzreihen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

Vorgelegt von
Rolf Trautner
aus
Kaiserslautern

Marburg/Lahn 1969

Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am 8. 5. 1969

Tag der mündlichen Prüfung am 14. 5. 1969

Berichterstatter: Prof. Dr. Peyerimhoff

Mitberichterstatter: Dozent Dr. Miesner

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhalt

§ 1 Problemstellung 2

§ 2 Die allgemeine Methode 4

§ 3 Bezeichnungen und Hilfsätze für Hausdorff-Verfahren 7

§ 4 Ein funktionentheoretisches Kriterium für die Summierbarkeit außerhalb des Okada-Gebietes 12

Literatur 15

§1 Problemstellung

Die Frage der Bestimmung des Wirkfeldes einer regulären Summationsmatrix A wird zum Teil durch den Satz von Okada beantwortet.
Es sei

$$(1) \qquad P(w) = \sum_0^\infty a_k w^k$$

eine Potenzreihe, von der wir einen positiven Konvergenzradius annehmen, M_p der Mittag-Leffler-Stern von P(w), d.h. dasjenige größte sternförmige (offene) Gebiet, in das sich die durch P(w) erzeugte Funktion radial von w = 0 ausgehend analytisch fortsetzen läßt.
Mit R'_A bezeichnen wir dasjenige größte sternförmige offene Gebiet, für welches die geometrische Reihe $\sum_0^\infty w^k$ auf jeder kompakten Teilmenge von R'_A gleichmäßig A-summiert wird. (R'_A enthält den Kreis $|w| < 1$.) R_A sei die aus R'_A durch Anwendung der Abbildung 1/w und Komplementbildung hervorgegangene abgeschlossene Punktmenge. (R_A ist im Kreis $|w| \leq 1$ enthalten.) Dann lautet der Satz von Okada [8]:
Die Reihe (1) wird in dem "Okada-Gebiet"

$$(2) \qquad G = \bigcap_{c \notin M_p} c.R'_A = \bigcup_{cR_A \subset M_p} c$$

summiert, und zwar gleichmäßig auf jedem Kompaktum von G.

G ist offen und sternförmig und hängt sowohl von dem Verfahren A als auch der Reihe P(w) ab. Es hat jedoch nur die Lage der Singularitäten, nicht aber ihre Ordnung einen Einfluß, so daß nicht zu erwarten ist, daß man mit Hilfe von G das vollständige Wirkfeld von A beschreiben kann. Und zwar gibt der Okadasche Satz keine Auskunft darüber, ob gewisse Reihen

a) für w vom Rand von G oder

b) für w außerhalb von G oder ob

c) gewisse Reihen von Radius 0 für $w \neq 0$

summiert werden.

Wir wenden uns dem Problem b) zu und sagen, der Okadasche Satz sei scharf, wenn keine Reihe P(w) mit positivem Konvergenzradius für $w \notin \overline{G}$ summiert wird. (Die abgeschlossene Hülle einer Menge werde durch Überstreichen gekennzeichnet.)

Die Frage, unter welchen Bedingungen für das Verfahren A der Okadasche Satz scharf ist, wurde offenbar bisher noch nicht systematisch untersucht. Es liegen lediglich gewisse Einzelergebnisse vor, so eine positive Beantwortung beim Borel-, Euler-, den Gronwall-Verfahren sowie bei Verfahren, für welche Mittelwertsätze gelten. Jedoch kann bereits das Phänomen der Überkonvergenz als ein Beispiel der Summierbarkeit außerhalb $\overline{G}$ angesehen werden (wenn man sich die Überkonvergenz durch Anwendung einer geeigneten Summationsmatrix erzeugt denkt.) Darüberhinaus hat Peyerimhoff [9] ein Beispiel eines Hausdorff-Verfahrens angegeben, für welches der Okadasche Satz nicht scharf ist.

In der vorliegenden Arbeit wird, ausgehend von einer Formel, die Peyerimhoff seinem Gegenbeispiel zugrunde legte, für beliebige Hausdorff-Verfahren ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß der Okadasche Satz scharf ist.

§2 Die allgemeine Methode

Wir erläutern zunächst die den folgenden Ergebnissen zugrunde liegende allgemeine Methode, die sich auch auf andere reguläre Verfahren $A = (a_{nv})$ übertragen läßt.

Es sei

$$(3) \qquad s_n = s_n(w) = \sum_0^n a_k w^k$$

die n-te Partialsumme von (1) und

$$(4) \qquad \tau_n = \tau_n(w) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}\, s_v(w)$$

die zugehörige Transformierte.
Es sei bei festem w und für große $|z|$

$$(5) \qquad s(z) = P(w/z) = \sum_0^{\infty} a_k w^k / z^k$$

$$= (z - 1) \sum_0^{\infty} s_n(w)/z^{n+1},$$

$$(6) \qquad \tau(z) = (z - 1) \sum_0^{\infty} \tau_n(w)/z^{n+1}.$$

$s(z)$ (ebenso $\tau(z)$) hängt noch von dem Parameter w ab; insbesondere ändert $s(z)$ mit w die Lage seiner Singularitäten.

Wir nehmen an, R_A sei gleich der abgeschlossenen Hülle seines Inneren. (Dadurch wird ausgeschlossen, daß R_A eine eindimensionale Menge ist wie etwa bei dem Le-Roy-Verfahren.)
Dann gilt

Lemma 1: a) Ist $w \in G$, so liegen alle Singularitäten von $s(z)$ in R'_A.
b) Ist $w \in$ Rand G, so liegen alle Singularitäten von $s(z)$ in $\overline{R'_A}$, und zwar mindestens eine auf Rand R'_A.
c) Ist $w \notin \overline{G}$, so gibt es eine Singularität von $s(z)$ außerhalb $\overline{R'_A}$.

Beweis: a) Ist $w \in G$, so ist nach (2) $w \cdot R_A \subset M_p$, also $P(w \cdot z)$ für $z \in R_A$ analytisch oder $s(z) = P(w/z)$ für $z \notin R'_A$.

c) Zunächst gilt

$$(2') \qquad \overline{G} = \bigcup_{cR_A \subset \overline{M}_p} c.$$

Ist nun $w \notin \overline{G}$, so ist $wR_A \not\subset \overline{M}_p$; also gibt es ein z_o aus dem Innern von R_A, so daß $P(w \cdot z)$ in z_o und $s(z) = P(w/z)$ für $z_1 = 1/z_o \notin \overline{R'}_A$ singulär ist.

b) Die Behauptung folgt aus a) und c), wenn man w stetig aus dem Innern von G nach außen wandern läßt.

Bei $\tau(z)$ interessiert der Zusammenhang zwischen der Lage der Singularitäten und der Konvergenz von τ_n.

Lemma 2: a) Konvergiert τ_n, so ist $\tau(z)$ für $|z| > 1$ regulär (trivial).

b) Ist $\tau(z)$ für $|z| \geq 1$ regulär, so konvergiert τ_n.

Beweis: b) Unter der Voraussetzung hat $\tau(z)/(z-1) = \sum_0^\infty \tau_n / z^{n+1}$ höchstens einen Pol 1. Ordnung bei $z = 1$ mit einem Residuum τ, also ist $\sum_0^\infty (\tau_n - \tau)/z^{n+1} = (\tau(z) - \tau)/(z-1)$ regulär für $|z| \geq 1$, woraus $\tau_n - \tau = O(a^n)$ für ein $0 < a < 1$ folgt.

Die Transformation der Folge $\{s_n\}$

$$(7) \qquad \{\tau_n\} = A \cdot \{s_n\}$$

ist äquivalent mit der Anwendung eines linearen Operators a auf die Funktion $s(z)$

$$(8) \qquad \tau(z) = a \cdot s(z).$$

Die Frage, ob der Okadasche Satz scharf ist, führt somit auf das Problem, wie die Singularitäten von $s(z)$ und $\tau(z)$ durch (8) ineinander transformiert werden.

Lemma 3: Der Okada-Satz ist genau dann scharf, wenn für jedes $P(w) = \sum_0^\infty a_k w^k$, $\limsup |a_k|^{1/k} < \infty$ gilt:
Die Konvergenz von $\{\tau_n\}$ impliziert die Regularität von $s(z)$ für $z \notin \overline{R'}_A$.

§3 Bezeichnungen und Hilfsätze für Hausdorff-Verfahren

$\chi(t)$ sei eine Funktion von beschränkter Schwankung auf $[0, 1]$, sie sei rechtsseitig stetig auf $[0, 1)$, und es gelte $\chi(0) = \chi(0+) = 0$ und $\chi(1) = 1$. Das durch sie erzeugte reguläre Hausdorff-verfahren heiße H_χ, die Momente seien

$$(9) \qquad d_n = \int_0^1 t^n \, d\chi(t).$$

Die Ordnung ρ (≤ 1) von $\chi(t)$ bzw H_χ sei

$$(10) \qquad \rho = \inf v \left\{ \chi(t) = \chi(1),\ v \leq t \leq 1 \right\}.$$

Die Zahl

$$(11) \qquad \rho_u = \liminf |d_n|^{1/n}$$

heiße die untere Ordnung,

$$(12) \qquad \rho_o = \limsup |d_n|^{1/n}$$

die obere Ordnung von $\chi(t)$ bzw H_χ.

Es gilt $\rho = \rho_o$.

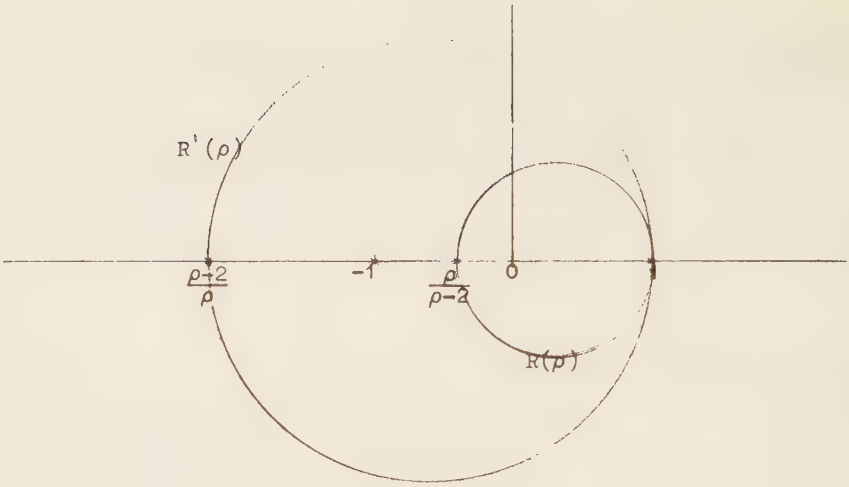
Das Summationsgebiet der geometrischen Reihe ist nach Agnew [2] der Kreis

$$(13) \qquad R'(\rho) = \left\{ w: \left| w - (\rho-1)/\rho \right| < 1/\rho \right\}$$

und das aus $\overline{R'(\rho)}$ durch Komplementbildung und Spiegelung am Einheitskreis erhaltene Gebiet

$$(14) \qquad R(\rho) = \left\{ w: \left| w - (\rho-1)/(\rho-2) \right| < 1/(2-\rho) \right\}$$

In der Bezeichnung von §1 ist $R'_{H_\chi} = R'(\rho)$ und $R_{H_\chi} = \overline{R(\rho)}$.



Das Okada-Gebiet für P(w) ist also

$$G = \bigcap_{c \notin M_p} cR'(\rho) = \bigcup_{\overline{cR(\rho)} \subset M_p} c. \tag{15}$$

Es seien

$$N = \{ n: \quad d_n = 0 \} \tag{16}$$

und falls $\rho_u > 0$ und N somit eine endliche Menge ist

$$d(z) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \notin N}}^{\infty} 1/d_n z^n, \qquad |z| > 1/\rho_u. \tag{17}$$

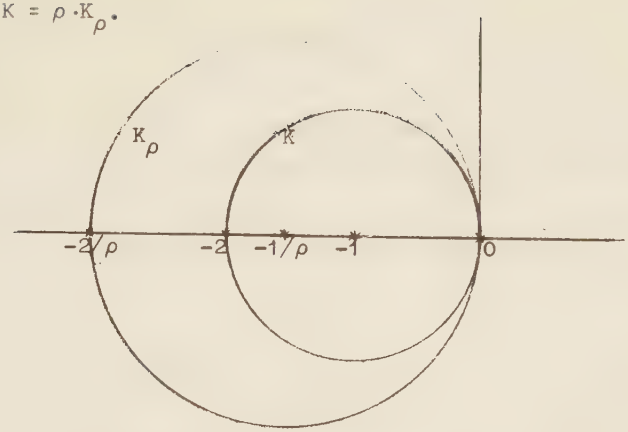
Im Falle ist $\rho_u = 0$ ist d(z) nicht definiert.

Es seien weiter

$$K = \{ z: \quad |z + 1| < 1 \} \tag{18}$$

$$K_\rho = \{ z: \quad |z + 1/\rho| < 1/\rho \} \tag{19}$$

Offenbar ist $K = \rho \cdot K_\rho$.



Die Hausdorff-Transformierten der Partialsummen s_n haben die Gestalt

$$(20) \qquad \tau_n = \tau_n(w) = \sum_0^n (H_\chi)_{nk}\, s_k(w)$$

$$= \int_0^\rho \sum_{k=0}^n t^k (1-t)^{n-k} \binom{n}{k} s_k(w)\, d\chi(t).$$

Statt $s(z)$ und $\tau(z)$ führen wir die Funktionen

$$(21) \qquad f(z) = P(w/(1+z)) = \sum_0^\infty a_n w^n/(1+z)^n$$

$$= z \cdot \sum_0^\infty s_n(w)/(1+z)^{n+1}$$

$$(22) \qquad g(z) = z \cdot \sum_0^\infty \tau_n(w)/(1+z)^{n+1}$$

ein. Da $P(w)$ einen positiven Konvergenzradius haben soll, sind $f(z)$ und $g(z)$ für große $|z|$ definiert und analytisch. Zwischen $f(z)$ und $g(z)$ besteht nach Jurkat, Peyerimhoff [5] die Beziehung

$$(23) \qquad g(z) = \int_0^{\rho} f(z/t)\, d\chi(t)$$

wodurch zusammen mit den Abbildungen $z \to z+1$, $z \to z-1$ der Operator $\mathcal{A}$ von (8) beschrieben wird.

Da $f(z)$ im Punkt ∞ analytisch ist ($f(\infty) = s_0$), hat die Laurententwicklung um den Nullpunkt die Gestalt

$$(24) \qquad f(z) = \sum_0^{\infty} c_n/z^n,$$

wobei die c_n noch von dem Parameter w abhängen. Es folgt nun zusammen mit (23) für große $|z|$.

$$(25) \qquad g(z) = \sum_0^{\infty} c_n d_n/z^n.$$

Die Übertragung von Lemma 1 bis 3 auf $f(z)$ und $g(z)$ liefert

Lemma 1a a) Ist $w \in G$, so liegen alle Singularitäten von $f(z)$ in K_ρ.
b) Liegt w auf dem Rand von G, so liegen alles Singularitäten von $f(z)$ in $\overline{K_\rho}$, mindestens jedoch eine auf dem Rand von K_ρ.
c) Ist $w \notin \overline{G}$, so hat $f(z)$ mindestens eine Singularität außerhalb $\overline{K_\rho}$.

Lemma 2a a) Konvergiert $\{\tau_n\}$, so ist $g(z)$ analytisch für $z \notin \overline{K}$.
b) Ist $g(z)$ analytisch für $z \notin K$, so konvergiert $\{\tau_n\}$.

Lemma 3a Der Okadasche Satz ist genau dann scharf, wenn für jedes $P(w) = \sum_0^{\infty} a_n w^n$, $\limsup |a_n|^{1/n}$, gilt: $\{\tau_n\}$ konvergent impliziert $f(z)$ regulär für $z \notin \overline{K}_\rho$.

Formel (25) erweist sich als die zweckmäßige Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $f(z)$ und $g(z)$ und legt die Anwendung des Hadamardschen Multiplikationssatzes nahe (Bieberbach [3], Seite 20). Es wird sich zeigen, daß der Okadasche Satz genau dann scharf ist, wenn der Hadamardsche Satz, angewandt

auf $\sum_0^\infty d_n/z^n$ und $f(z) = \sum_0^\infty c_n/z^n$ für alle derartigen $f(z)$ den Mittag-Leffler-Stern der Produkt-Funktion $g(z) = \sum_0^\infty c_n d_n/z^n$ genau angibt.

§4 Ein funktionentheoretisches Kriterium für die Summierbarkeit außerhalb des Okada-Gebietes

Satz 1: Es sei $\rho_u = \rho_o$ $(=\rho)$, und es sei d(z) regulär und eindeutig außerhalb des Intervalls $[0, 1/\rho]$.

Beh. Dann ist der Okadasche Satz scharf.

Beweis: Wir nehmen an, daß $\{\tau_n\}$ konvergiere, so daß nach Lemma 2a g(z) außerhalb $\overline{K}$ regulär ist. Wendet man auf $g(z) = \sum_0^\infty c_n d_n / z^n = \sum_{n \notin N} c_n d_n / z^n$ und $d(z) = \sum_{n \notin N} 1/(d_n z^n)$ den Hadamārdschen Multiplikationssatz an, so folgt, daß

$\hat{f}(z) = \sum_{n \notin N} c_n / z^n$ **für $z \notin \overline{K_\rho}$ regulär ist.**

$\hat{f}(z)$ unterscheidet sich von f(z) jedoch nur durch den Pol $\sum_{n \in N} c_n / z^n$ (N ist endlich wegen $\rho_u > 0$), sodaß auch f(z) außerhalb $\overline{K_\rho}$ regulär ist, woraus sich nach Lemma 3a die Behauptung ergibt.

Satz 2: **Es sei $\rho_u > 0$. Hat d(z) eine Singularität außerhalb des Intervalles $[0, 1/\rho]$, so ist der Okadasche Satz nicht scharf.**

Beweis Es sei s eine Singularität $\notin [0, 1/\rho]$. Dann gibt es ein $t \in K$, so daß $s \cdot t \notin \overline{K_\rho}$ ist.
(Ist $s = r \cdot e^{i\phi}$ und zunächst $\phi = 0$, also $r > 1/\rho$, so setze man $t = -(2 - \varepsilon)$ für ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß $s \cdot t < -2/\rho$ ist. Ist $\phi \neq 0$, so kann man $t = |t| e^{i\eta} \in K$ so wählen, daß $\mathrm{Re}(e^{i(\phi+\eta)}) > 0$, also $s \cdot t \notin \overline{K_\rho}$ ist.)
Wir betrachten das Polynom $\prod_{n \in N} (z - n)$ und setzen

$$g(z) = \sum_0^\infty P(n) t^n / z^n = \sum_{n \notin N}^\infty P(n) t^n / z^n.$$

$f(z) = \sum_{n \notin N} P(n) t^n / (d_n z^n)$ hat nach Bieberbach [3], Satz 5.1.VI sicher eine Singularität $s \cdot t \notin \overline{K_\rho}$.

Wir definieren nun durch den Ansatz $f(z) = z \cdot \sum_0^\infty s_n/(1+z)^{n+1}$ eine Potenzreihe $P(w) = \sum_0^\infty (s_k - s_{k-1})w^k$, $s_{-1} = 0$, die einen positiven Konvergenzradius hat (da $f(z)$ wegen $\rho_u > 0$ für große $|z|$ analytisch ist). $g(z)$ ist nach dem Satz von Wigert (Bieberbach [3], S. 8) nur bei $z = t \in K$ singulär, so daß nach Lemma 2a $\{\tau_n\}$ konvergiert. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 3a.

Wir stellen (hier ohne Beweis) fest, daß in dem Falle $\rho_u = 0$ ($d(z)$ ist dann nicht definiert) der Okadasche Satz nicht scharf ist.

Wir erhalten somit den folgenden

Hauptsatz: **Genau dann ist der Okadasche Satz scharf, wenn gilt**

A) $\rho_u = \rho_o = \rho$.

B) **Alle Singularitäten von $d(z)$ liegen auf dem Intervall $[0, 1/\rho]$.**

Problem: Unter welchen Bedingungen kann B) aus A) hergeleitet werden?

Soula [11] und Agmon [1] befassen sich mit der Lage der Singularitäten von Potenzreihen mit reziproken Koeffizienten. Eventuell liefert eine Verschärfung deren Ergebnisse für **Momentfolgen ein weiterführendes Resultat. Zunächst erhält man nach Soula, Theoreme III, das folgende**

Korrollar: Eine notwendige Bedingung dafür, daß der Okadasche Satz scharf ist, ist

$$\lim d_{n+1}/d_n = \rho. \tag{26}$$

Satz 3: Ist der Okadasche Satz scharf für die Verfahren H_{χ_1} und H_{χ_2}, so auch für das Produktverfahren $H_{\chi} = H_{\chi_1} \cdot H_{\chi_2}$.

Beweis: Seien $\{d_n^{(1)}\}$, $\{d_n^{(2)}\}$, $\{d_n\} = \{d_n^{(1)} \cdot d_n^{(2)}\}$ die Momentfolgen mit den zugehörigen Funktionen $d^{(1)}(z)$, $d^{(2)}(z)$, $d(z)$.

Zunächst folgt aus der Gültigkeit von Bedingung A) des Hauptsatzes für H_{χ_1} und H_{χ_2} auch die Gültigkeit für $H_{\chi_1} \cdot H_{\chi_2}$, ferner B) mittels des Hadamardschen Satzes, angewandt auf $d^{(1)}(z)$ und $d^{(2)}(z)$.

Bei Peyerimhoffs Beispiel ist $\rho_u = 0$. Wir geben noch ein Beispiel eines Hausdorff-Verfahrens, für welches der Okadasche Satz nicht scharf ist, an mit $\rho_u > 0$.

Hierzu wählen wir eine Momentfolge $d_n \geq 0$ mit $d_{n_k} = 0$ für eine geeignete Teilfolge n_k. Ist die Ordnung gleich ρ, so hat die neue Momentfolge $d_n' = (d_n + (\rho.a)^n)/2$, $0 < a < 1$, die Eigenschaft $\rho_o' = \rho$ und $\rho_u' = a.\rho > 0$.

Zur Konstruktion der d_n wählen wir die Funktion

$$D(z) = \exp(-z^{\alpha}) \prod_{l=0}^{\infty} (1 - (z/2^l)^2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Nach Bieberbach[3] Satz 1.3.VII ist der zweite Anteil von $D(z)$ vom Minimaltypus der Ordnung 1, so daß sich $D(z)$ nach Doetsch [4], Seite 263 als Laplace-Integral darstellen läßt. Ferner ist $D(2^n) = 0$, $D(n) \geq 0$ und $d_n = D(n)$ sind die gewünschten Momente.

Wir erwähnen noch

Satz 4: Definiert $P(w)$ eine in 0 reguläre und überall eindeutige Funktion, die nur isolierte Singularitäten hat, so wird $P(w)$ für kein $w \notin \overline{G}$ summiert.

Beweis: Mit $P(w)$ hat auch $f(z)$ nur isolierte Singularitäten. Die Behauptung folgt dann aus Bieberbach [3], Satz 5.2.IX, angewandt auf $f(z)$ und $\sum_0^{\infty} d_n/z^n$.

Literatur

[1] Agmon, On the singularities of TAYLOR series with reciprocal coefficients.
Pac. J. Math. 2, 431-453 (1952)

[2] Agnew, Analytic extension by Hausdorff methods.
Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 217-237

[3] Bieberbach, Analytische Fortsetzung
Springer Verlag, Berlin 1955

[4] Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation I
Basel 1950

[5] Jurkat, Peyerimhoff, The consistency of Nörlund and Hausdorff methods (solution of a problem of E. Ulrich)
An.of Math. (2) 62 (1955) 498-503

[6] Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren
Math. Z. 15 (1922), 226-253

[7] Lorentz, Bernstein Polynomials
Toronto 1953

[8] Okada, Über die Annäherung analytischer Funktionen
Math. Z. 23 (1925), 62-71

[9] Peyerimhoff, Lecture Notes on Summability
Springer Verlag 1969 (im Druck)

[10] Polya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Zweite Mitteilung.
Ann. Math. (2) 34, 731-777 (1933)

[11] Soula, Sur les points singulaires des deux fonctions $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma z^n/a_n$.
Bull. Soc. Math. France 56, 36-49 (1928)

Lebenslauf

Geboren wurde ich, Rolf Trautner, am 7. August 1939 in Kaiserslautern als Sohn des Diplom-Ingenieurs Hermann Trautner und seiner Ehefrau Lucie, geborene Rahm. Im Frühjahr 1959 legte ich an dem Rheingau-Gymnasium Geisenheim-Rüdesheim die Reifeprüfung ab und begann nach einjähriger Militärzeit zum SS 1960 an der Universität Marburg das Studium der Mathematik, das ich nach dem SS 1966 mit dem Diplom abschloß. Seit Oktober 1966 bin ich Angestellter am Institut für medizinisch-biologische Statistik und Dokumentation der Universität Marburg.

Meine akademischen Lehrer, denen ich auf diesem Wege danken möchte, waren die Herren Professoren Avakumovic, Endl, Großmann, Huckemann, Klingen, Levin, Madelung, Mann, Petzold, Peyerimhoff, Richert, Schmidt, Schütte, Walcher und Wirsing.

Besonderen Dank aussprechen möchte ich Herrn Professor Dr. A. Peyerimhoff, der die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise gab, sowie Herrn Professor Dr. P. Ihm für die großzügige Erlaubnis, mich während der Arbeitszeit mit diesem Thema zu befassen.